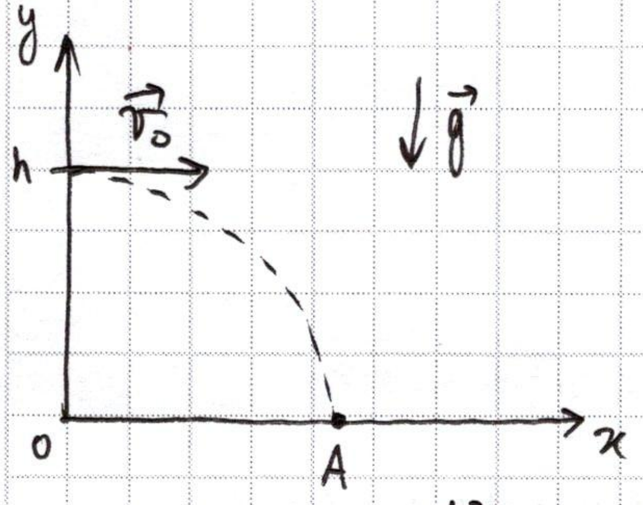
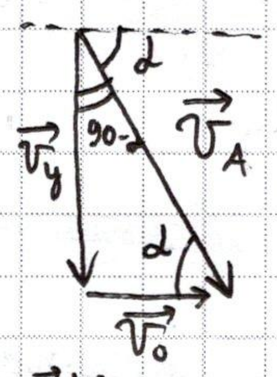
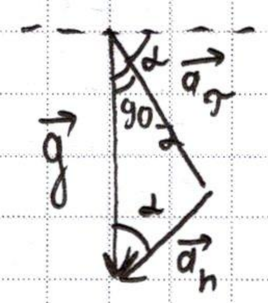
№1



В точке A:





$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$ $\quad$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$\begin{cases} -h = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v_y = -gt \end{cases} \quad v_x = v_0$$

$$v_y = -\sqrt{2gh}$$

$$v_A = \sqrt{v_y^2 + v_x^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$\sin\alpha = \frac{|v_y|}{v_A} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Среднее тангенциальное ускорение:

$$a_{\tau ср} = \frac{v_A - v_0}{t} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$a_\tau = g\sin\alpha$$

По условию: $\frac{3}{2} a_{\tau ср} = a_\tau$

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = g \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$\frac{3}{2}(v_0^2 + 2gh) - \frac{3}{2} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = g \cdot 2h$$

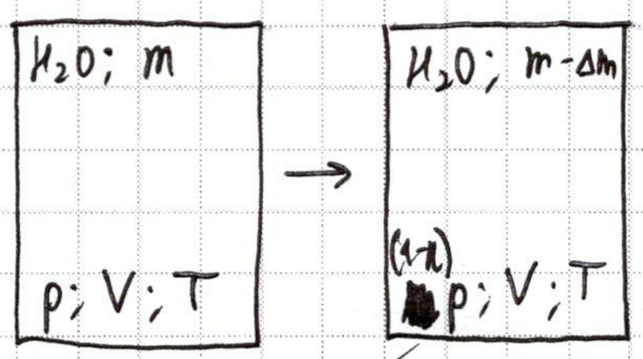
$$\frac{3}{2} v_0^2 + gh = \frac{3}{2} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$\frac{9}{4} v_0^4 + 3v_0^2 gh + g^2h^2 = \frac{9}{4} v_0^4 + \frac{g}{4} \cdot v_0^2 \cdot 2gh$$

$$gh\left(gh - \frac{3}{2} v_0^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{3v_0^2}{2g} \text{ (т.к. } h \neq 0) = \frac{3 \cdot (10\,м/с)^2}{2 \cdot 10\,м/с^2} = 15\,м$$

Ответ: 15 м.

№ 2



Из з-на Менделеева-Клапейрона:

$$\begin{cases} pV = \frac{m}{\mu} RT \\ (1-\eta)pV = \frac{m-\Delta m}{\mu} RT \end{cases} \Rightarrow RT = \frac{pV\mu}{m}$$

$$pV - pV + \eta pV = \frac{mRT}{\mu} - \frac{mRT}{\mu} + \frac{\Delta m RT}{\mu}$$

$$\eta pV = \frac{\Delta m RT}{\mu}$$

$$\Delta m = \frac{\mu \eta pV}{RT} = \frac{0{,}018\ кг/моль \cdot 0{,}1 \cdot 10^5\ Па \cdot 0{,}01\ м^3}{8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}}$$

$$(1-\eta)pV = \frac{m-\Delta m}{\mu} \cdot \frac{pV\mu}{m}$$

$$(1-\eta) = 1 - \frac{\Delta m}{m}$$

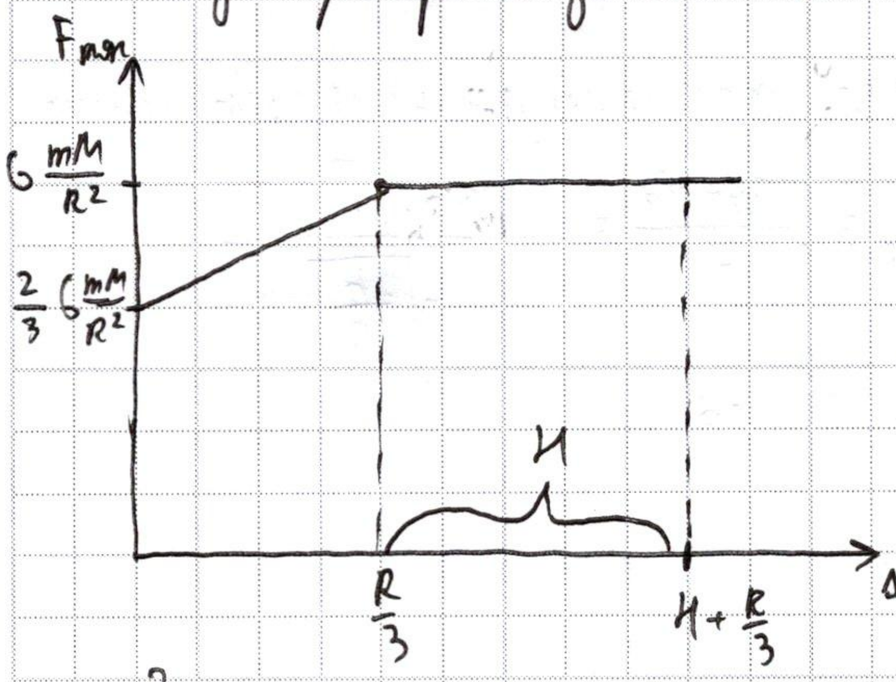
$$\frac{\Delta m}{m} = \eta \Rightarrow \Delta m = \eta m = 0{,}1 \cdot 18\ г = 1{,}8\ г$$

Ответ: 1,8 г

№ 3

Пусть астероид имеет массу M, ракета m.

Тогда график зависимости силы тяготения от перемещения:



Тогда работа, совершаемая ракетой:

$$A = -A' = \text{площади под графиком} =$$

$$= \frac{R}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}+1}{2} G\frac{mM}{R^2} + H \cdot G\frac{mM}{R^2} =$$

$$= G\frac{mM}{R^2}\left(\frac{R}{3} \cdot \frac{5}{6} + H\right) = G\frac{mM}{R^2}\left(\frac{5R}{18} + H\right)$$

З-н изменения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{R^2}\left(\frac{5R}{18} + H\right), \quad \text{где } v = \sqrt{\frac{MG}{R}} - \text{I космическая скорость}$$

$$\frac{MG}{2R} = \frac{MG}{R^2}\left(\frac{5R}{18} + H\right)$$

$$\frac{1}{2R} = \frac{5}{18R} + \frac{H}{R^2}$$

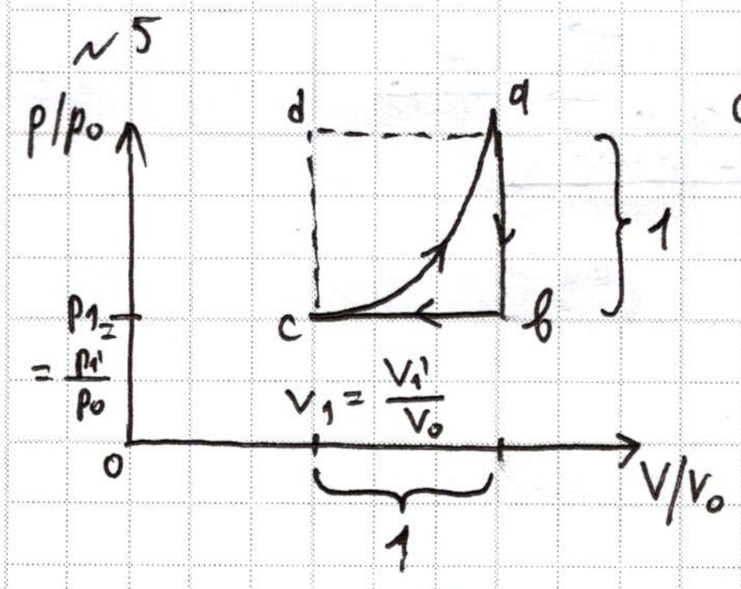
$$H = \frac{R}{2} - \frac{5R}{18} = \frac{4R}{18} = \frac{2R}{9} = \frac{2 \cdot 462\ км}{9} =$$

$$= 102{,}67\ км$$

Ответ: 102,67 км

olymp.bmstu.ru

№5



а) $\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{A}{U_a - U_c + A_{ca}} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}(p_1+1)(V_1+1) - \frac{3}{2}p_1V_1 + 1\cdot p_1 + 1 - \frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{3}{2} + p_1 + 1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}}$

$\eta_{acda} = \eta_1 = \frac{A_{acda}}{U_a - U_c + A_{da}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}(p_1+1)(V_1+1) - \frac{3}{2}p_1V_1 + (p_1+1)\cdot 1} =$

$= \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2}}$

$\eta_{abcda} = \eta_2 = \frac{A_{abcda}}{U_a - U_c + A_{da}} = \frac{\eta_1}{(\frac{\pi}{4})} = \frac{4\eta_1}{\pi}$

$\left(\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\eta = 1 - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2}\right)\eta = 1 - \frac{\pi}{4}(1-\eta) \Rightarrow$

$\left(\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2}\right)\eta_1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}(1-\eta)}{\frac{\pi}{4}}$ $\quad \eta_1 = \frac{\eta}{\frac{4}{\pi} - 1 + \eta}$ $\quad \eta_2 = \frac{\eta_1}{(\frac{\pi}{4})} = \frac{\eta}{1 - \frac{\pi}{4}(1-\eta)}$

Ответ: $\eta_1 = \frac{\eta}{\frac{4}{\pi} - 1 + \eta}$; $\eta_2 = \frac{\eta}{1 - \frac{\pi}{4}(1-\eta)}$

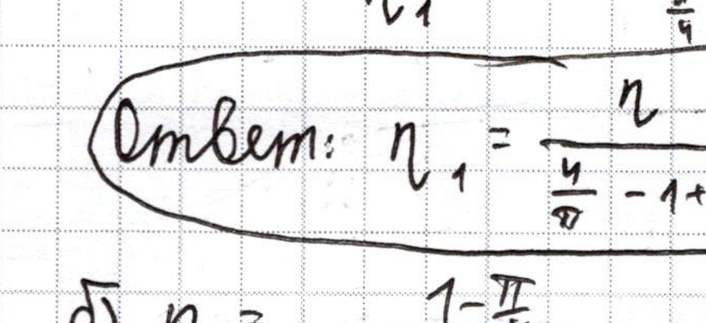
б) $\eta = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{5}{2}p_1 + \frac{3}{2}V_1 + \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}}$ $\Rightarrow \eta$ max при $p_1; V_1$ min $\Rightarrow p_1 = V_1 = 0$

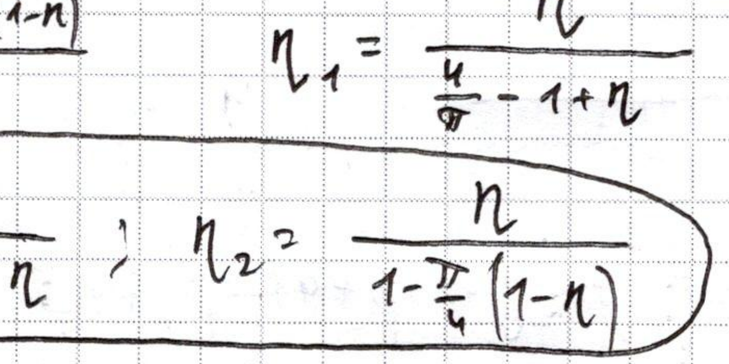
$\eta_{max} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{4 - \pi}{10 - \pi} \approx 12{,}5\%$

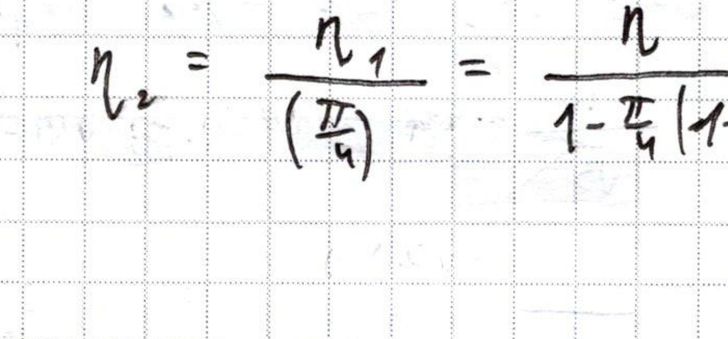
Ответ: 12,5%

№6

а)







II з-н Ньютона: $N_1 = mg\cos\alpha$

$N_2 = m_2 g\cos\beta$

$0 = N_1\sin\alpha - N_2\sin\beta$

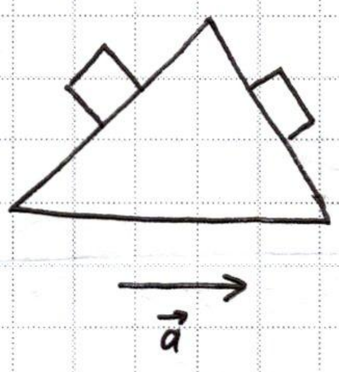
III з-н Ньютона: $N_1 = P_1$ $\quad N_2 = P_2$

$\Rightarrow mg\sin\alpha\cos\alpha = m_2 g\sin\beta\cos\beta$

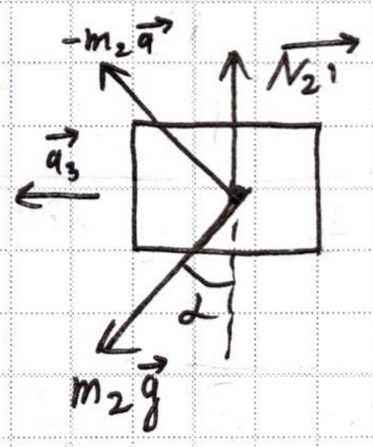
$$m_2 = m\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta} = m\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2m}{\sqrt{3}}$$

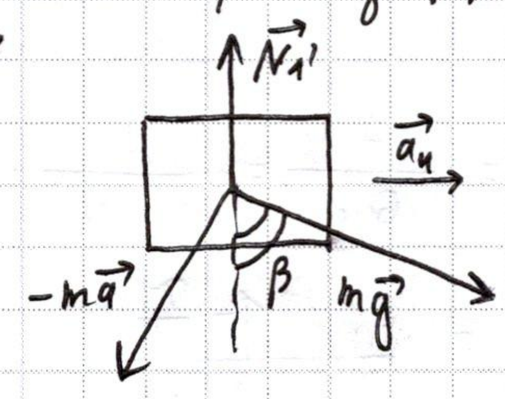
Ответ: $\frac{2m}{\sqrt{3}}$

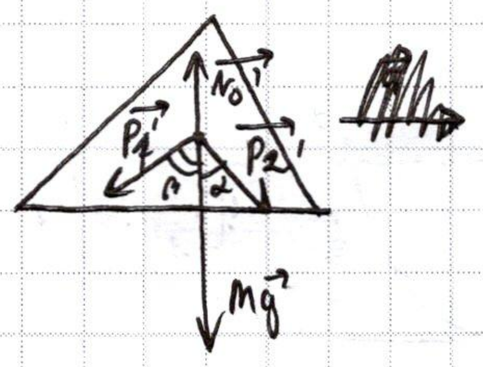
б)



Решим в неИСО, связанной с горкой







III з-н Ньютона: $N_2' = P_2'$; $N_1' = P_1'$

II з-н Ньютона:

$0 = N_2' + m_2 a - m_2 g$

$0 = N_1' - mg - ma$

$0 = N_2'\sin\alpha - N_1'\sin\beta$

$$\begin{cases} 0 = N_2' + m_2 a\sin\alpha - m_2 g\cos\alpha \\ 0 = N_1' - ma\sin\beta - mg\cos\beta \\ 0 = N_2'\sin\alpha - N_1'\sin\beta \end{cases}$$

$N_2' = m_2(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$

$N_1' = m(g\cos\beta + a\sin\beta)$

$$\frac{2m}{\sqrt{3}}(g\cos\beta + a\sin\beta)\sin\alpha = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\beta$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(g\cos\beta + a\sin\beta)\sin\alpha = (g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\beta$$

$$2g\sin\alpha\cos\beta + 2a\sin\alpha\sin\beta = \sqrt{3}g\sin\beta\cos\alpha - \sqrt{3}a\sin\beta\sin\alpha$$

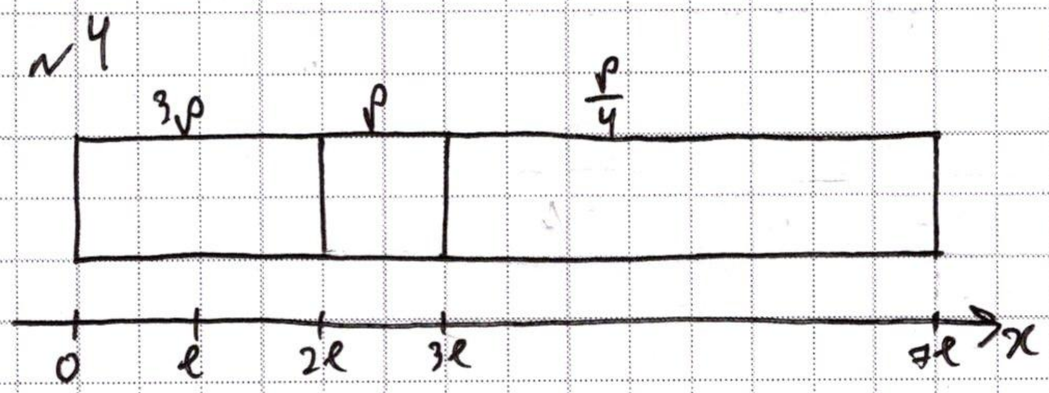
$$a(2\sin\alpha\sin\beta + \sqrt{3}\sin\beta\sin\alpha) = g(\sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta)$$

$$a = g\frac{\sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta + \sqrt{3}\sin\beta\sin\alpha} = 10\,м/с^2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot 10\,м/с^2}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{10\,м/с^2}{4+3\sqrt{3}} \approx 1{,}09\,м/с^2$$

Ответ: $1{,}09\,м/с^2$

№4



Найдём центр масс:

$$r_m = \frac{m_1 \ell + m_2 \cdot \frac{5\ell}{2} + m_3 \cdot 5\ell}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Пусть сечение заготовки равно $S \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_m = \frac{3\rho \cdot 2\ell \cdot S \cdot \ell + \rho \cdot \ell \cdot S \cdot \frac{5\ell}{2} + \frac{\rho}{4} \cdot 4\ell \cdot S \cdot 5\ell}{3\rho \cdot 2\ell \cdot S + \rho \cdot \ell \cdot S + \frac{\rho}{4} \cdot 4\ell \cdot S} = \frac{27\ell}{16}$$

Заготовка займёт вертикальное положение тогда, когда ~~уровень~~ центр приложения сил Архимеда будет больше центра масс.

Найдём центр приложения сил Архимеда:

1) Если уровень 2ℓ (погружена I часть)

$$r_{A1} = \ell < r_m$$

2) Если уровень 3ℓ (погружены I и II часть)

$$r_{A2} = \frac{\rho \cdot 2\ell \cdot S \cdot \ell + \rho \cdot \ell \cdot S \cdot \frac{5\ell}{2}}{\rho \cdot 2\ell \cdot S + \rho \cdot \ell \cdot S} = \frac{3}{2}\ell < r_m$$

3) Если уровень $3\ell + x$ (погружены I, II и частично III части)

$$r_{A3} = \frac{\rho \cdot 2\ell \cdot S \cdot \ell + \rho \cdot \ell \cdot S \cdot \frac{5\ell}{2} + \rho \cdot x \cdot S \cdot \left(3\ell + \frac{x}{2}\right)}{\rho \cdot 2\ell \cdot S + \rho \cdot \ell \cdot S + \rho \cdot x \cdot S}$$

$$r_{A3} = r_m \Rightarrow \frac{2\ell^2 + \frac{5\ell^2}{2} + 3\ell x + \frac{x^2}{2}}{2\ell + \ell + x} = \frac{27\ell}{16}$$

$$\frac{9\ell^2}{4} + 3\ell x + \frac{x^2}{2} = \frac{81\ell^2}{16} + \frac{27\ell x}{16}$$

$$36\ell^2 + 48\ell x + 8x^2 = 81\ell^2 + 27\ell x$$

$$8x^2 + 21\ell x - 45\ell^2 = 0$$

$$D = (21^2 + 4 \cdot 8 \cdot 45)\ell^2 = 1881\ell^2$$

$$x = \frac{-21 \pm 3\sqrt{209}}{16}\ell \Rightarrow x \approx 1{,}4\ell \Rightarrow h = 3\ell + x \approx 4{,}4\ell$$

Ответ: $4{,}4\ell$

~ 7



Из з-на Менделеева Клапейрона

(считая объём воды малым по сравнению с объёмами сосуда):

$$p_0 V = \nu R (T - \Delta T)$$

$$pV = \nu R T$$

$$\frac{p_0}{p} = \frac{T - \Delta T}{T} \Rightarrow p = p_0 \frac{T}{T - \Delta T} = p_0 + \frac{\Delta T}{T - \Delta T}$$

Производительность $N \sim p - p_0 - \rho g h$

$$N \sim p_0 \frac{\Delta T}{T - \Delta T} - \rho g h$$

$$\frac{N_x}{N_m} = \frac{p_0 \frac{\Delta T}{T_x - \Delta T} - \rho g h}{p_0 \frac{\Delta T}{T_m - \Delta T} - \rho g h} = \frac{10^5 \text{Па} \cdot \frac{15\text{К}}{278\text{К}} - 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 0{,}5\text{м}}{10^5 \text{Па} \cdot \frac{15\text{К}}{293\text{К}} - 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 0{,}5\text{м}} \approx 3{,}3$$

Ответ: в 3,3 раза